第一章 群表示的基本概念

QQ群:

§1.1. 定义和例子

G = 群

回顾群在集合上的作用: $G \curvearrowright X$

$$\boxed{\begin{array}{l} G\times X \longrightarrow X \quad (g,x)\mapsto g.x \\ \text{满足} \quad i)\ \ 1.x = x \\ \qquad\quad\ \ ii)\ \ g_1.(g_2.x) = (g_1g_2).x \end{array}}$$

$$\forall g\in G \Rightarrow \varphi_g : X\to X \quad x\mapsto g.x$$

$$\varphi_g\circ\varphi_{g^{-1}} = id_X = \varphi_{g^{-1}}\circ\varphi_g \quad \Rightarrow \varphi_g \text{ 为双射}$$

$$\Rightarrow \varphi_g \in S_X := \{f: X\to X \mid f \text{ 为双射}\}$$

事实: 1) S_X 关于 $\circ$ 形成群

2) $\varphi: G\to S_X$ 为群同态
$g\mapsto \varphi_g$

反之, 给定群同态 $\varphi: G\to S_X$, 定义

$$\begin{array}{ccc} G\times X & \longrightarrow & X \\ (g, x) & \longmapsto & \varphi(g)(x) \end{array}$$

本课程: 集合 $\rightsquigarrow$ F-向量空间 (集合 + 线性空间结构)

定义1: 称 $G\times V\to V$ $(g,v)\mapsto gv$ 为 G 在 V 上的 F-线性作用, 若其满足

$$\left.\begin{array}{ll} i) & g(u+v) = g(u)+g(v) \\ ii) & g(au) = a\,g(u) \end{array}\right\} F\text{-线性}$$

$$\left.\begin{array}{ll} iii) & 1v = v \\ iv) & (g_1g_2)v = g_1(g_2v) \end{array}\right\} G\text{-作用}$$

$\forall g\in G \Rightarrow \varphi_g: V\to V \quad v\mapsto gv$ （F-线性同构）

$GL(V) := \{\mathcal{A}: V\to V \mid \mathcal{A}$ 为F-线性空间同构$\}$

↳ 一般线性群

事实：$\varphi: G\to GL(V)$ $\quad g\mapsto \varphi_g$ 为群同态.

反之，给定群同态 $\varphi: G\to GL(V)$，可如下定义F-线性作用：

$$\begin{aligned} G\times V &\longrightarrow V \\ (g,v) &\longmapsto \varphi(g)(v) \end{aligned}$$

定义2：若 $\varphi: G\to GL(V)$ 为群同态，则称 (V,φ) 为G的一个F-线性表示

简称 V 或 φ 为F-表示. 称 $\deg\varphi=\dim_F V$ 为该表示的维数（本课程：有限维）

若 φ 为单同态，则称 φ 是G的忠实表示.

性质3： $\{(V,\varphi)\mid F\text{-表示}\} \xleftrightarrow[\varphi(g)(v)=gv]{\cong} \{G\times V\to V \mid F\text{-线性作用}\}$

$(V,\varphi) \longmapsto (G\times V\to V,\ (g,v)\mapsto gv := \varphi(g)(v))$

$\begin{pmatrix}\varphi: G\to GL(V)\\ g\mapsto (v\mapsto gv)\end{pmatrix} \longleftarrow (G\times V\to V,\ (g,v)\mapsto gv)$

观点：群表示为线性代数的推广（同时处理多个相关的线性变换）

群表示 = 群在线性空间上的线性作用.

例（单位表示，主表示 $1_G=(F,1)$） $V=F$.

$$\begin{aligned} G\times F &\longrightarrow F \\ (g,v) &\longmapsto v \end{aligned} \qquad \begin{aligned} &\varphi: G\to GL(V)=F^{\times} \quad g\mapsto 1 \\ &\text{i.e. } gv:=v \quad \forall g\in G,\ \forall v\in V. \end{aligned}$$

例：$D_4=\langle a,b \mid a^4=b^2=1=(ba)^2\rangle$ ← 正方形的对称群

$V=\mathbb{C}e_1\oplus\mathbb{C}e_2$

$\varphi(a^m b^n)(e_1,e_2)=(e_1,e_2)\begin{pmatrix} i & \\ & -i\end{pmatrix}^m\cdot\begin{pmatrix} & 1\\ 1 & \end{pmatrix}^n$

（验证良定义性，φ 为群同态）

$$\begin{aligned} \varphi_{\{e_1,e_2\}}: D_4 &\longrightarrow GL_2(\mathbb{C}) \\ a &\longmapsto \begin{pmatrix} i & \\ & -i\end{pmatrix} \\ b &\longmapsto \begin{pmatrix} & 1\\ 1 & \end{pmatrix} \end{aligned}$$

例（矩阵表示与表示的矩阵）　$V=n$ 维 $\mathbb{F}$-线性空间．固定一组基 $B=(e_1,\cdots,e_n)$．

$$\mathcal{A}(e_1,\cdots,e_n)=(e_1,\cdots,e_n)A$$

$$\Rightarrow\quad \begin{array}{ccc} GL(V) & \xrightarrow[\text{基}B]{\cong} & GL_n(\mathbb{F}) \\ \mathcal{A} & \longmapsto & A \end{array}$$ （群同构）

$$\begin{tikzcd} & G \arrow[dl, "\varphi"'] \arrow[dr, "\varphi_B"] & \\ GL(V) \arrow[rr, "\cong"', "B"] & & GL_n(\mathbb{F}) \end{tikzcd}$$

矩阵表示

$$\boxed{\varphi(g)\cdot B=B\cdot\varphi_B(g)}$$

$$\Rightarrow\quad \begin{array}{ccc} \{G\to GL(V)\} & \xleftrightarrow[\text{基}B]{1:1} & \{G\to GL_n(\mathbb{F})\} \\ \varphi & \longmapsto & \varphi_B \end{array}$$

例（置换表示）　$G\curvearrowright X$　$V:=\mathbb{F}X$（以 X 中元素为基元作成的 $\mathbb{F}$-线性空间）

$=\{\sum_{x\in X} r_x[x]$ 形式和 $\mid r_x\in\mathbb{F},\ \{r_x\}_{x\in X}$ 仅有有限项不为零$\}$

$$\varphi(g)\Big(\sum_{x\in X} r_x\cdot[x]\Big):=\sum_{x\in X} r_x\cdot[g.x]=\sum_{x\in X} r_{g^{-1}x}[x]$$

$$\begin{array}{ccc} G\times\mathbb{F}X & \longrightarrow & \mathbb{F}X \\ \Big(g,\ \sum_{x\in X} r_x[x]\Big) & \longmapsto & \sum_{x\in X} r_{g^{-1}x}[x] \end{array}$$

设 $X=\{x_1,\cdots,x_n\}$ 有限，则 $\varphi(g)(x_1,\cdots,x_n)=(g.x_1,g.x_2,\cdots,g.x_n)$ 为 $\{x_1,\cdots,x_n\}$ 的重排．因此 $\varphi_X(g)$ 为置换矩阵（0-1阵，每行每列仅有一个元素不为0）

$$\varphi(g)(x_1,\cdots,x_n)=(x_1,\cdots,x_n)\,\varphi_X(g)$$

45

例（正则表示）　考察 G 在 $X=G$ 上的自然左作用：　$g.x:=gx$．对应的置换表示

记为 $(\mathbb{F}G,\varphi_{reg})$，称为 G 的正则表示．

$$\varphi_{reg}(g).\Big(\sum_{x\in G} r_x[x]\Big):=\sum_{x\in G} r_x\cdot[gx]=\sum_{x\in G} r_{g^{-1}x}[x]$$

注：1) 忠实　2) 在基 G 下矩阵为置换矩阵．

例：考察 G 在 $X=G$ 上的共轭作用： $g.x := gxg^{-1}$. 对应的置换表示记为 $(\mathbb{F}G, \varphi_{conj})$. 则

$$\varphi_{conj}(g).\Big(\sum_{x\in G} r_x [x]\Big) := \sum_{x\in G} r_x\cdot[gxg^{-1}] = \sum_{x\in G} r_{g^{-1}xg}\,[x]$$

例： $G=S_3 \curvearrowright X=\{1,2,3\}$. 则

$$\varphi_X((1)) = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \quad \varphi_X((12)) = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & \\ 1 & 0 & \\ \hline & & 1 \end{array}\right) \quad \varphi_X((13)) = \begin{pmatrix} & & 1 \\ & 1 & \\ 1 & & \end{pmatrix}$$

$$\varphi_X((23)) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & & \\ \hline & 0 & 1 \\ & 1 & 0 \end{array}\right) \quad \varphi_X((123)) = \left(\begin{array}{cc|c} & & 1 \\ \hline 1 & 0 & \\ 0 & 1 & \end{array}\right) \quad \varphi_X((132)) = \left(\begin{array}{c|cc} & 1 & 0 \\ & 0 & 1 \\ \hline 1 & & \end{array}\right)$$

§1.2 表示的子、商与同态

群论：子群，商群，同态基本定理

目标：推广到表示情形

线性变换的不变子空间：$\mathcal{A}: V\to V$　　$U\subseteq V$,　　$\mathcal{A}(U)\subseteq U$.

群表示：同步处理相互关联的$|G|$个V上的线性变换.

定义4 $(V,\varphi)=$ G的$\mathbb{F}$-表示.

1)（子表示）设U为V的G-不变子空间. 即,

$$\varphi(g)U\subseteq U,\quad (\forall g\in G)$$

则称$(U,\varphi|_U)$为(V,φ)的子表示.（简称U为V的子表示）

2)（商表示）设$(U,\varphi|_U)$为(V,φ)的子表示. 记

$$\varphi_{V/U}(g)(v+U):=\varphi(g)(v)+U.$$

则$(V/U,\varphi_{V/U})$构成G的F-表示，称之为(V,φ)的商表示.

将U的基$C=(u_1,\cdots,u_r)$扩充为V的基$B=(u_1,\cdots,u_r,u_{r+1},\cdots,u_n)$，则

$$\varphi_B(g)=\begin{pmatrix}(\varphi|_U)_C(g) & * \\ & (\varphi_{V/U})_{\bar{B}}(g)\end{pmatrix}\qquad \bar{B}=(\bar{u}_{r+1},\cdots,\bar{u}_n)$$

例 1) $z=\sum_{g\in G} g\in\mathbb{F}G \Rightarrow \mathbb{F}z\le(\mathbb{F}G,\varphi_{reg})$为子表示.

2) $N\trianglelefteq G$,　$\mathbb{F}N\le(\mathbb{F}G,\varphi_{conj})$为子表示.

保持所有结构的映射：

定义5. 设$(V_1,\varphi_1),(V_2,\varphi_2)$为群$G$的两个$F$表示. 若映射$f:V_1\to V_2$满足

i) f是$\mathbb{F}$-线性的

ii) f保持G作用. i.e.　$f\circ\varphi_1(g)=\varphi_2(g)\circ f\ (\forall g)$

$$\begin{tikzcd} V_1 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi_1(g)"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & V_2 \arrow[d, "\varphi_2(g)"] \\ V_1 \arrow[r, "f"] & V_2 \end{tikzcd}$$

则称f为V_1到V_2的表示同态，或G-模映射.

若f同时为双射，则称f为表示同构或G-模同构，记为$V_1\cong V_2$或$\varphi_1\cong\varphi_2$

回看页25'

性质6：设 $f:(V_1,\rho_1)\to(V_2,\rho_2)$ 为 G 模同态，则

i). $\ker f := \{v\in V_1 \mid f(v)=0\}$ 为 (V_1,ρ_1) 的子表示

ii). $\operatorname{Im} f := \{f(v)\mid v\in V_1\}$ 为 (V_2,ρ_2) 的子表示

iii). f 单 $\Leftrightarrow \ker f=0$

iv). f 满 $\Leftrightarrow \operatorname{Im} f = V_2$

v). $\dim_F(\ker f)+\dim_F(\operatorname{Im} f)=\dim_F V_1$

vi). $\operatorname{Im} f \cong V_1/\ker f$ （G-模同构）

同态基本定理.

vii). 设 $g:(V_1,\rho_1)\to(V_3,\rho_3)$ 满足 $\ker f\subseteq \ker g$，则 $\exists!\, h:\operatorname{Im} f\to(V_3,\rho_3)$ s.t. $g=h\circ f$.

$$\begin{tikzcd}
\ker f \arrow[r] \arrow[d, phantom, "\cap"] & V_1 \arrow[r, "f"] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \operatorname{im} f \arrow[d, dashed, "\exists!\, h"] \\
\ker g \arrow[r] & V_1 \arrow[r, "g"] & V_3
\end{tikzcd}
\qquad
V_1/\ker g \cong \frac{V_1/\ker f}{\ker g/\ker f}$$

设 V_1, V_2 为 G 的 F-表示，记

$\operatorname{Hom}_F(V_1,V_2)=\{V_1$ 到 V_2 的全体 F-线性表示$\}$

$\forall f\in \operatorname{Hom}_F(V_1,V_2)$, $\forall g\in G$,

$$(gf)(v) := g\left(f(g^{-1}v)\right)$$

$$\begin{tikzcd}
V_1 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & V_2 \arrow[d, "g"] \\
V_1 \arrow[r, "gf"] & V_2
\end{tikzcd}$$

$\operatorname{Hom}_G(V_1,V_2)=\{V_1$ 到 V_2 的全体 G 模映射$\}$

45

性质7：1) $\operatorname{Hom}_F(V_1,V_2)$ 为 G 的 $\dim_F V_1\cdot\dim_F V_2$-维 F-表示、

2) $\operatorname{Hom}_G(V_1,V_2)$ 为 $\operatorname{Hom}_F(V_1,V_2)$ 的子表示.

3) $\operatorname{Hom}_G(V_1,V_2)=\left(\operatorname{Hom}_F(V_1,V_2)\right)^G := \{f\in \operatorname{Hom}_F(V_1,V_2)\mid gf=f\}$

例：$D_4=\langle a,b \mid a^4=b^2=1=(ba)^2\rangle$ $\quad V=\mathbb{C}e_1\oplus\mathbb{C}e_2$

$$\rho_1:\begin{cases} a(e_1,e_2)=(e_1,e_2)\begin{pmatrix} i & \\ & -i\end{pmatrix} \\ b(e_1,e_2)=(e_1,e_2)\begin{pmatrix} & 1\\ 1 & \end{pmatrix}\end{cases}
\qquad
\rho_2:\begin{cases} a(e_1,e_2)=(e_1,e_2)\begin{pmatrix} & -1\\ 1 & \end{pmatrix} \\ b(e_1,e_2)=(e_1,e_2)\begin{pmatrix} & 1\\ 1 & \end{pmatrix}\end{cases}$$

则 $f:(V,\rho_1)\to(V,\rho_2)$ $\quad (e_1,e_2)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\mapsto(e_1,e_2)\begin{pmatrix}1 & -i\\ -i & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ 为 G-模同构.

§1.3. 表示的常用构造法.

1.3.1 表示的直和.

(V_i,φ_i) $i=1,\cdots,n$, 为 G 的 $\mathbb{F}$-表示.

$$V := V_1\oplus V_2\oplus\cdots\oplus V_n$$

定义:

$$\varphi(g)(v_1,\cdots,v_n) := (\varphi_1(g)v_1,\cdots,\varphi_n(g)v_n)$$

则 (V,φ) 构成 G 的 $\mathbb{F}$-表示, 称为 (V_i,φ_i) 的直和 记为 $(V_1\oplus\cdots\oplus V_n, \varphi_1\oplus\cdots\oplus\varphi_n)$

注: 设 B_i 为 V_i 的一组基. $B=B_1\cup\cdots\cup B_n$, 则

$$(\varphi_1\oplus\cdots\oplus\varphi_n)_B(g) = \begin{pmatrix}\varphi_{1B_1}(g) & & \\ & \ddots & \\ & & \varphi_{nB_n}(g)\end{pmatrix} \quad \forall g\in G.$$

矩阵形式

引理: V, V_i $i=1,\cdots,n$ 为 G 的 $\mathbb{F}$-表示.

$$V\cong V_1\oplus\cdots\oplus V_n \iff \exists \text{子表示 } V_i'\subseteq V \text{ s.t. } \begin{cases} V=V_1'+\cdots+V_n' \\ V_i'\cap(V_{i+1}'+\cdots+V_n')=0.\end{cases}$$

Pf: $\Rightarrow$) ✓

$\Leftarrow$) 线性代数 $\Rightarrow$ $V=V_1'\oplus\cdots\oplus V_n'$ (作为 $\mathbb{F}$-线性空间) $\Rightarrow$ ✓

子表示何时为直和项?

若 $V=U\oplus W$, 则称 W 为 U 的补表示

引理: $U\subseteq V$ 子表示. 则

U 有补表示 $\iff$ $\exists G$-模投射 $p: V\twoheadrightarrow U$ (i.e. $p|_U=\mathrm{id}_U$)

Pf: $\Rightarrow$) ✓

$\Leftarrow$): $W:=\ker p$. 则 $V=U\oplus W$ □

1.3.2. 反轭 (contragredient) 表示.

设 (V,φ) 为 G 的 $\mathbb{F}$-表示.

$$V^* := \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V,\mathbb{F})$$

$$\varphi^*(g)(f)(v) := f(\varphi(g^{-1})(v)) \quad \forall f\in V^*, \forall v\in V.$$

$\Rightarrow$ (V^*,φ^*) 为 G 的 $\mathbb{F}$-表示. 称之为 (V,φ) 的反轭表示.

注: 取值映射 $(V,\varphi)\times(V^*,\varphi^*)\to(\mathbb{F},\varphi_{triv})$ 为 G-模同态.

性质: 设 $B=(v_1,\cdots,v_n)$ 为 V 的一组基. 设 $B^*=(f_1,\cdots,f_n)$ 为 B 的对偶基. 则

$$\varphi^*_{B^*}(g) = \left(\varphi_B(g)^{-1}\right)^T.$$

Pf: 1° $\left(\varphi^*(g)(B^*)\right)^T\cdot\left(\varphi(g)(B)\right) := \begin{pmatrix}\varphi^*(g)(f_1)\\ \vdots \\ \varphi^*(g)(f_n)\end{pmatrix}\left(\varphi(g)(v_1),\cdots,\varphi(g)(v_n)\right)$

$$=\Big(\varphi^*(g)(f_i)\left(\varphi(g)(v_j)\right)\Big)_{ij} = \left(f_i(v_j)\right)_{ij} = I$$

2° $\left(\varphi^*(g)(B^*)\right)^T\cdot\left(\varphi(g)(B)\right) = \left(B^*\varphi^*_{B^*}(g)\right)^T\left(B\,\varphi_B(B)\right)$

$$=\left(\varphi^*_{B^*}(g)\right)^T\cdot(B^*)^T B\ \varphi_B(B) = \left(\varphi^*_{B^*}(g)\right)^T\varphi_B(B)$$

1.3.3 表示的张量.

M, N, V = $\mathbb{F}$-线性空间.

称映射 $f: M\times N\to V$ 为 $\mathbb{F}$-双线性映射, 若 $\forall \lambda_i, \mu_j\in\mathbb{F}, \forall m_i\in M, \forall n_j\in N$

$$f(\lambda_1 m_1+\lambda_2 m_2, \mu_1 n_1+\mu_2 n_2) = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\lambda_i\mu_j\cdot f(m_i,n_j)$$

称$\mathbb{F}$-线性空间 W 为 M与N在$\mathbb{F}$上的张量积, 若存在 $\mathbb{F}$-双线性映射

$$\eta: M\times N\to W$$

满足对任意 $\mathbb{F}$-双线性映射 $f: M\times N\to V$, 均存在唯一的 F-线性映射

$$\tilde{f}: W\to V$$

满足 $f=\tilde{f}\circ\eta$

$$\begin{tikzcd}
M\times N \arrow[r, "\eta"] \arrow[dr, "f"'] & W \arrow[d, "\exists!\,\tilde{f}"] \arrow[d, phantom, ""] \\
& V
\end{tikzcd}$$

性质: 张量积存在且唯一.

Pf: 唯一性.

$$\begin{tikzcd}
M\times N \arrow[r, "\eta"] \arrow[dr, "\eta'"'] & W \arrow[loop above, "id_W"] \arrow[d, shift right, "\tilde f"'] \\
& W' \arrow[u, shift right, "\tilde f'"'] \arrow[loop below, "id_{W'}"]
\end{tikzcd}$$

存在性: $$M\otimes_{\mathbb{F}} N := \bigoplus_{\substack{m\in M\\ n\in N}} \mathbb{F}\cdot(m,n) \Bigg/ \left(\begin{matrix} (\lambda m, n) - \lambda(m,n) \\ (m,\lambda n) - \lambda(m,n) \\ (m_1+m_2, n) - (m_1,n) - (m_2,n) \\ (m, n_1+n_2) - (m,n_1) - (m,n_2) \end{matrix} \;\middle|\; \begin{matrix} m\in M \\ n\in N \end{matrix} \right)$$

$$m\otimes_{\mathbb{F}} n := [(m,n)] \in M\otimes_{\mathbb{F}} N$$

向量空间的张量基本性质:

1) $(rv)\otimes w = r(v\otimes w) = v\otimes(rw)$

$(v_1+v_2)\otimes w = v_1\otimes w + v_2\otimes w$

$v\otimes(w_1+w_2) = v\otimes w_1 + v\otimes w_2$

2) 若 $\{m_i \mid i\in B\}$ 和 $\{n_j \mid j\in C\}$ 为 M 和 N 的一组基, 则

$$\{ m_i\otimes n_j \mid (i,j)\in B\times C \}$$

为 $M\otimes N$ 的一组基. 特别地, 若 $w_1,\cdots,w_r$ 在 N 中线性无关, 则

$$\sum_{i=1}^{r} v_i\otimes w_i = 0 \Rightarrow v_1=\cdots=v_r=0.$$

3) $V\otimes\mathbb{F} \cong V \cong \mathbb{F}\otimes V$

$V\otimes_{\mathbb{F}} W \cong W\otimes_{\mathbb{F}} V$

$V\otimes(W_1\oplus W_2) \cong (V\otimes W_1)\oplus(V\otimes W_2)$

$(V_1\oplus V_2)\otimes W \cong (V_1\otimes W)\oplus(V_2\otimes W)$

$(U\otimes V)\otimes W \cong U\otimes(V\otimes W)$

$f: M \to P \quad g: N \to Q$

性质：$\exists!$ 线性~~映射~~ $f\otimes g: M\otimes N \to P\otimes Q$ s.t.

$$(f\otimes g)(m\otimes n) = f(m)\otimes g(n).$$

Pf：张量的泛性质． □

推论：1) 若 $f\in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(M)$, $g\in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(N)$，则 $f\otimes g \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(M\otimes_{\mathbb{F}} N)$.

2) $(f_2\otimes g_2)\circ(f_1\otimes g_1) = (f_2\circ f_1)\otimes(g_2\circ g_1)$

其中 $M_1 \xrightarrow{f_1} M_2 \xrightarrow{f_2} M_3$，$N_1 \xrightarrow{g_1} N_2 \xrightarrow{g_2} N_3$

取 M,P,N,Q 的一组基：

$B_M=(e_1^M,\dots,e_m^M)$, $B_P=(e_1^P,\dots,e_p^P)$, $B_N=(e_1^N,\dots,e_n^N)$, $B_Q=(e_1^Q,\dots,e_q^Q)$

记 $B_{M\otimes N} := \{e_1^M\otimes e_1^N,\dots,e_1^M\otimes e_n^N,\dots,e_m^M\otimes e_1^N,\dots,e_m^M\otimes e_n^N\}$

$B_{P\otimes Q} := \{e_1^P\otimes e_1^Q,\dots,e_1^P\otimes e_n^Q,\dots,e_m^P\otimes e_1^Q,\dots,e_m^P\otimes e_n^Q\}$

设 $f B_M = B_P\cdot A$ 及 $g B_N = B_Q B$．则

$$(f\otimes g)B_{M\otimes N} = B_{P\otimes Q}\cdot(A\otimes B) \quad \text{其中 } A\otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1r}B \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}B & \cdots & a_{rr}B \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} f(e_1^M,\dots,e_m^M) = (e_1^P,\dots,e_p^P)(a_{ij})_{p\times m} \\ g(e_1^N,\dots,e_n^N) = (e_1^Q,\dots,e_q^Q)(b_{ij})_{q\times n} \end{cases}$$

$$(f\otimes g)(e_j^M\otimes e_t^N) = \left(\sum_{i=1}^{p} a_{ij}\cdot e_i^P\right)\otimes\left(\sum_{s=1}^{q} b_{st}e_s^Q\right)$$

$$= \sum_{i,j}(a_{ij}b_{st})\cdot(e_i^P\otimes e_s^Q) = B_{P\otimes Q}\begin{pmatrix} a_{1j}b_{1t} \\ \vdots \\ a_{1j}b_{nt} \\ \vdots \\ a_{mj}b_{1t} \\ \vdots \\ a_{mj}b_{nt} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow (f\otimes g)B_{M\otimes N} = B_{P\otimes Q}\begin{pmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1r}B \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}B & & a_{rr}B \end{pmatrix}$$

推论：$\mathrm{tr}(f\otimes g) = \mathrm{tr}(f)\cdot\mathrm{tr}(g)$.

设 $(V_1,\varphi_1),(V_2,\varphi_2)$ 为 G 的 $\mathbb{F}$-表示. $\Rightarrow$ 新表示: $(V_1\otimes V_2,\ \varphi_1\otimes\varphi_2)$

$$(\varphi_1\otimes\varphi_2)(g) := \varphi_1(g)\otimes\varphi_2(g) \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V_1\otimes_{\mathbb{F}} V_2)$$

性质: $V^*\otimes W \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V,W)$ 为表示同构.

45

Pf: $\varphi: f\otimes w \mapsto (v\mapsto f(v)w)$ 良定义

维数相同. 仅需证 φ 为单同态.

单: 设 $w_1,\dots,w_n$ 为 W 的一组基. $V^*\otimes W$ 中元素可唯一表示为 $\sum_{i=1}^n f_i\otimes w_i$

若 $\varphi(\sum_{i=1}^n f_i\otimes w_i)=0$, 则 $\varphi(\sum_{i=1}^n f_i\otimes w_i)(v)=\sum_{i=1}^n f_i(v)w_i=0\ (\forall v)$

$\Rightarrow f_i(v)=0\ \forall v\ \forall i$

$\Rightarrow f_i=0\ \forall i$

$\Rightarrow \sum_{i=1}^n f_i\otimes w_i=0$

$$\begin{cases} \varphi\big(g(f\otimes w)\big)(v) = g(f)(v)\cdot g(w) = f(g^{-1}(v))\cdot g(w) \\ g\big(\varphi(f\otimes w)\big)(v) = g\big(\varphi(f\otimes w)(g^{-1}v)\big) = g\big(f(g^{-1}v)\cdot w\big) = f(g^{-1}(v))\cdot gw. \end{cases}$$

$\Rightarrow$ φ 为 G-模同态.

1.3.4. 表示的提升

$\pi: G_1\to G_2$, $\eta: G_2\to GL(V)$ $\Rightarrow$ $\varphi=\eta\circ\pi: G_1\to GL(V)$

称为 η 通过 π 的提升.

eg. 1° (V,φ) = G 的 $\mathbb{F}$-表示. $H\le G \Rightarrow (V,\varphi_H)$ $\quad \varphi_H: H\subset G\xrightarrow{\varphi} GL(V)$.

2° $N\trianglelefteq G$, (V,φ) = N 的 $\mathbb{F}$-表示.

$\forall g\in G \Rightarrow g: N\to N\quad n\mapsto \overset{\sigma_g(n)}{\overset{\parallel}{g^{-1}ng}} \Rightarrow$

$$\begin{tikzcd} N \arrow[r, "\sigma_g"] \arrow[dr, "{}^g\varphi"'] & N \arrow[d, "\varphi"] \\ & GL(V) \end{tikzcd}$$

$\Rightarrow (V, {}^g\varphi)$ = N 的 $\mathbb{F}$-表示

推论：$N \lhd G$．$\pi: G \twoheadrightarrow G/N$ 诱导双射

$$\{G/N\text{ 的表示}\} \xrightarrow[1:1]{\psi} \{\varphi: G\text{ 的表示} \mid \ker\varphi \supseteq N\}$$

$$(V, \varphi) \longmapsto (V, \varphi\circ\pi)$$

1.3.5. 表示的外张量积

$G = G_1 \times G_2$，(V_i, φ_i) 为 G_i 的 $\mathbb{F}$-表示．

$$\varphi_1 \# \varphi_2 : G_1 \times G_2 \longrightarrow GL(V_1 \otimes V_2)$$

$$(g_1, g_2) \longmapsto \varphi_1(g_1) \otimes \varphi_2(g_2)$$

则 $(V_1 \otimes V_2, \varphi_1 \# \varphi_2)$ 构成 G 的 $\mathbb{F}$-表示，称为 φ_1 与 φ_2 的外张量积

注：若 $\mathbb{F} = \overline{\mathbb{F}}$，$\mathrm{char}\,\mathbb{F} = 0$，$\#G_i < \infty$．则 $G_1 \times G_2 \times \cdots \times G_m$ 的任一 $\mathbb{F}$-表示均为形如 $\varphi_1 \# \cdots \# \varphi_m$ 的表示的直和．

§1.4 不可约表示与完全可约表示

$(V,\varphi)=G$ 的 $\mathbb{F}$-表示.

定义1.4.1. 1). 若 $V\neq 0$ 且除了 0 和自身以外没有其它的子表示, 则称 (V,φ) 不可约,

$$\overline{\mathrm{Irr}_{\mathbb{F}}G}=\{(V,\varphi)\mid 不可约\}/\sim$$

2). 若 (V,φ) 能分解为不可约表示的直和, 则称 (V,φ) 是完全可约表示.

性质: 任一不可约表示均为正规表示的商表示.

Pf: (V,φ) 不可约. $\forall v\in V\setminus\{0\}$. 考虑 $\pi:\mathbb{F}G\to V\quad \sum\limits_{g\in G}\lambda_g\cdot g\mapsto\sum\limits_{g\in G}\lambda_g(gv)$

π 为 G-模映射 $\xRightarrow{V不可约}$ π 满 $\Rightarrow V\cong\mathbb{F}G/\ker\pi$. $\Rightarrow\square$.

例1.4.2.1. 1). $\dim V=1\Rightarrow$ 不可约

2). V 不可约 $\Rightarrow V^*$ 不可约

3). (V,φ) 不可约 $\Rightarrow(V,\varphi^\sigma)$ 不可约

例1.4.2.2 $G=\langle g\rangle$ p 阶循环.

$U=\mathbb{Q}(g-1)\oplus\mathbb{Q}(g^2-g)\oplus\cdots\oplus\mathbb{Q}(g^{p-1}-g^{p-2})\leq(\mathbb{Q}G,\varphi_{reg})$

$\Rightarrow U$ 为 G 的不可约 $\mathbb{Q}$-表示.

Pf: 反证. 若 U 可约, 则 $\varphi_B(g)\sim\begin{pmatrix}A&C\\&D\end{pmatrix}\Rightarrow\varphi(g)$ 特征多项式可约. 然而在基

$g-1,g^2-g,\cdots,g^{p-1}-g^{p-2}$ 下 g 的矩阵为 $\begin{pmatrix}0&&&-1\\1&\ddots&&\vdots\\&\ddots&0&-1\\&&1&-1\end{pmatrix}$, 其特征多项式为 $\lambda^{p-1}+\cdots+\lambda+1$ 不可约.

基本性质1.4.3: TFAE

i) $(V,\varphi)=$ 完全可约

ii) $(V,\varphi)=$ 不可约子表示之和

iii) (V,φ) 的子表示均有补

iv) (V,φ) 的不可约子表示均有补

Pf: i) $\Rightarrow$ ii) ✓

iii) $\Rightarrow$ iv) ✓

ii) $\Rightarrow$ iii) 设 $V=\oplus V_i\quad V_i$ 不可约 $\quad U\leq V$ 子表示

$W:=$ 满足 $U\cap W=0$ 的最大子表示.

以下仅需证明: $V=U+W$.

若 $U+W\neq V \Rightarrow \exists i$ s.t. $V_i \nsubseteq U+W$
$\Rightarrow V_i\cap(U+W)=0$
$\Rightarrow U\cap(W+V_i)=0 \Rightarrow W=W+V_i \Rightarrow V_i\subseteq W$ ↯

iv)$\Rightarrow$i)：对 V 的维数归纳.

· 取 V 的维数最小的子表示 U，则 U 不可约
$\Rightarrow \exists W\leq V$ s.t. $V=U\oplus W$
$\forall\, U'<W$ 子表示．$\Rightarrow V=U'\oplus W' \Rightarrow W=U'\oplus(W'\cap W)$
归纳假设 $\Rightarrow$ W 完全可约 $\Rightarrow$ V 完全可约． □

性质 1.4.4 阿贝尔群的不可约复表示均为一维的.

Pf：线性代数 $\Rightarrow$ 两两可换的线性变换有公共的特征向量．$\Rightarrow$ ✓.

Schur 引理 1.4.5. (V_1,ρ_1)，(V_2,ρ_2) 为 G 的两不可约 $\mathbb{F}$-表示．则

i) $f:V_1\to V_2$ 非零 $\Rightarrow$ f 为同构.

ii) $\rho_1\ncong\rho_2 \Rightarrow \mathrm{Hom}_G(V_1,V_2)=0$

iii) $\mathrm{Hom}_G(V_1,V_1)$ 为包含 $\mathbb{F}$ 的除环

iv) $\mathbb{F}=\overline{\mathbb{F}} \Rightarrow \mathrm{Hom}_G(V_1,V_1)\doteq\mathbb{F}\cdot 1_{V_1}\cong\mathbb{F}$.

Pf： i) $\forall f\in\mathrm{Hom}_G(V_1,V_2)\setminus\{0\} \Rightarrow 0\to\ker f\to V_1\to \mathrm{im} f\to 0$

V_1 不可约 $\Rightarrow \ker f=0$
V_2 不可约 $\Rightarrow \mathrm{im} f=V_2$
$\Big\}\Rightarrow V_1 \overset{\sim}{\underset{f}{\to}} V_2$

ii) ✓
iii) ✓
iv) $\forall f\in\mathrm{Hom}_G(V_1,V_1) \Rightarrow \mathbb{F}[f]$ 为 $\mathbb{F}$ 的域扩张，$\mathbb{F}=\overline{\mathbb{F}}$ $\Big\}\Rightarrow f\in\mathbb{F} \Rightarrow$ ✓.

定义 1.4.6 (分裂域). 称域 $\mathbb{F}$ 为群 G 的分裂域，若对 G 的任一不可约 $\mathbb{F}$-表示 V 均有
$$\mathrm{Hom}_G(V,V)\cong\mathbb{F}.$$

注： 1) Schur 引理 $\Rightarrow$ 代数封闭域为分裂域.

2) $\mathrm{char}\,\mathbb{F}\neq 2,3 \Rightarrow \mathbb{F}$ 为 S_3 的分裂域.（1.7.6.

引理 1.4.7.（合成列）. (V,φ) 为（有限群）G 的（有限维）F-表示．则存在

$$(V,\varphi)=(V_0,\varphi_0)\supset(V_1,\varphi_1)\supset\cdots\supset(V_{m-1},\varphi_{m-1})\supset(V_m,\varphi_m)=0$$

s.t. $(V_i,\varphi_i)/(V_{i+1},\varphi_{i+1})$ 不可约 $\forall i$

这样的序列称为 V 的**合成列**，$(V_i,\varphi_i)/(V_{i+1},\varphi_{i+1})$ $(i=0,\cdots,m-1)$ 称为**合成因子**.

注: 1) 合成因子出现的次数不依赖于合成列的选取.
2) 设 U_i $(i=1,\cdots,n)$ 为全体不可约表示．$d_i=U_i$ 在合成因子中出现次数

$$\mathbf{dim}\,(V,\varphi):=(d_1,\cdots,d_n)\longleftarrow \text{同构不变量}.$$

例: $G=\langle g\rangle$ p 阶循环.

合成列：$(\mathbb{Q}G,\varphi_{reg})\supset U=\{\sum_{h\in G}\lambda_h\cdot h\mid\sum_h\lambda_h=0\}\supset\{0\}$

$(\mathbb{Q}G,\varphi_{reg})\supset\mathbb{Q}z\supset\{0\}$ $\quad(z=\sum_{h\in G}h)$

设 V 不可约 $\overset{2.2.4}{\underset{2.2.5}{\Longrightarrow}} V\cong \mathrm{Hom}_G(\mathbb{Q}G,V)=\mathrm{Hom}_G(U\oplus kz,V)=\mathrm{Hom}_G(U,V)\oplus\mathrm{Hom}_G(\mathbb{Q}z,V)$

Schur 引理 $\Rightarrow V\cong U$ 或 $V\cong\mathbb{Q}z$ $\Rightarrow \mathbf{dim}\,\mathbb{Q}G=(1,1)$

定理 1.4.8. 任意有限群的有限维表示均可实现为酉表示.

即 $\forall(V,\varphi)$，$\exists V$ 上的内积 $\langle-,-\rangle$ s.t. $\forall g\in G$，$\varphi(g)$ 为 V 上酉变换．即

$$\langle gv_1,gv_2\rangle=\langle v_1,v_2\rangle\quad\forall v_1,v_2\in V.$$

证：任取 V 的一组基 $u_1,\cdots,u_n$．令 $(-,-)$ 为该基下通常内积，即

$$\left(\sum a_iu_i,\sum b_ju_j\right):=\sum_{i=1}^n a_i\overline{b_i}$$

记 $\langle v_1,v_2\rangle:=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}(gv_1,gv_2)$.

易知 $\langle-,-\rangle$ 也为内积，且 $\forall h\in G$

$$\langle hv_1,hv_2\rangle=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}(ghv_1,ghv_2)=\frac{1}{|G|}\sum_{g'\in G}(g'v_1,g'v_2)=\langle v_1,v_2\rangle$$

$\Rightarrow\varphi(h)$ 为 V 上的酉变换

推论 4.9. (V,ρ) 为有限群 G 的 n 维复表示. $g\in G$, $g^m=1$. 则存在 V 的一组基 B

s.t. $\rho_B(g)=\mathrm{diag}(\omega_1,\cdots,\omega_n)$, 其中 $\omega_1,\cdots,\omega_n$ 均为 m 次单位根.

Pf: $\left.\begin{aligned}&\rho(g)^m=1 \Rightarrow \rho(g)\ \text{特征值为}\ m\ \text{次单位根}\\ &\rho(g)=\text{酉} \Rightarrow \rho(g)\ \text{可对角化}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \checkmark$

§1.5. Maschke 定理

记号：$\mathrm{char}\,\mathbb{F} \nmid |G| \Leftrightarrow \mathrm{char}\,\mathbb{F}=0$ 或 $\begin{cases} \mathrm{char}\,\mathbb{F}=p>0 \\ p\nmid |G| \end{cases}$

定理 1.5.1.(Maschke). $\#G<\infty$. $\mathrm{char}\,\mathbb{F}\nmid|G|$. 则 G 的任一 $\mathbb{F}$-表示均完全可约.

Pf: 仅需证明：任一表示 (V,ρ) 的任一子表示 U 均有补表示 W.

$W_0 :=$ U 的补空间. (i.e. $V=U\oplus W_0$ 作为 $\mathbb{F}$-线性空间)

记 $\psi: V\to U$

$v\mapsto \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} g^{-1}p(gv)$ $\quad V=U\oplus W_0 \overset{p}{\twoheadrightarrow} U$

则 $\psi|_U=\mathrm{id}_U$ 且 ψ 为 G-模同态. 因此 $V=U\oplus \ker\psi$. □.

定理 1.5.1.(Maschke逆定理) $\#G<\infty$. 若 $\mathrm{char}\,\mathbb{F}\mid|G|$, 则 $\mathbb{F}G$ 不完全可约.

Pf: 假若 $\mathbb{F}G$ 完全可约. 设 $\mathbb{F}z\subsetneq \mathbb{F}G$ 的补表示为 W. (i.e. $\mathbb{F}G=\mathbb{F}z\oplus W$)

$1=az+w$ $\quad (a\in\mathbb{F},\ z=\sum_{g\in G} g)$

$\Rightarrow \sum_{g\in G} gw=\sum_{g\in G} g(1-az)=\sum_{g\in G} g - a\sum_{g\in G} z = (1-a|G|)\cdot z = z\in \mathbb{F}z\cap W=0$ ↯

§1.6 表示的不可约分解

$\operatorname{char}\mathbb{F}\nmid |G|$.

定理 1.6.1 (分解唯一性) 设 $V\cong n_1V_1\oplus\cdots\oplus n_sV_s\cong m_1W_1\oplus\cdots\oplus m_tW_t$ 为 V 的两不可约分解.
则 $s=t$ 且 $\exists\,\pi\in S_t$ s.t. $W_i=V_{\pi(i)}$ $m_i=n_{\pi(i)}$.

Pf: $\operatorname{Hom}_G(V,W_i)=\operatorname{Hom}_G(\bigoplus_j m_jW_j,W_i)=m_i\operatorname{Hom}_G(W_i,W_i)\neq 0$

$\Rightarrow \operatorname{Hom}_G(V,W_i)=\bigoplus_j n_j\operatorname{Hom}_G(V_j,W_i)\neq 0 \Rightarrow \exists!\,j=:\pi(i)$ s.t. $V_j\cong W_i$

$\Rightarrow m_i\operatorname{Hom}(W_i,W_i)=n_{\pi(i)}\operatorname{Hom}_G(V_{\pi(i)},W_i)\Rightarrow m_i=n_{\pi(i)}$

$\Big\}\Rightarrow\checkmark$

定理 1.6.2 (正则表示的不可约分解) 1) 任不可约表示均为正则表示的直和项

2) $\operatorname{Irr}_{\mathbb{F}}(G)$ 有限, 记为 $\{(V_1,\rho_1),\cdots,(V_s,\rho_s)\}$.

3) $\rho_{reg}=\left(\frac{\deg\rho_1}{d_1}\right)\rho_1\oplus\cdots\oplus\left(\frac{\deg\rho_s}{d_s}\right)\rho_s$ where $d_i=\hom_G(V_i,V_i)$.

Pf: $\rho_{reg}=\bigoplus_i n_i\rho_i$ $\forall\,(V,\rho)$ 不可约 则

$V\cong\operatorname{Hom}_G(\mathbb{F}G,V)\cong\bigoplus n_i\operatorname{Hom}_G(V_i,V)\Rightarrow\exists\,i_0$ s.t. $V\cong V_{i_0}$

$\Rightarrow\deg\rho_{i_0}=n_{i_0}d_{i_0}\Rightarrow n_{i_0}=\frac{\deg\rho_{i_0}}{d_{i_0}}\Rightarrow\checkmark$

推论 1.6.3 (不可约表示维数公式) 设 $\operatorname{Irr}_{\mathbb{F}}(G)=\{(V_1,\rho_1),\cdots,(V_s,\rho_s)\}$.

$n_i=\dim V_i$, $d_i=\dim_{\mathbb{F}}\operatorname{Hom}_G(V_i,V_i)$ 则

$$|G|=\sum_{i=1}^s\frac{n_i^2}{d_i}=\sum_{i=1}^s\left(\frac{n_i}{\sqrt{d_i}}\right)^2$$

特别地, 若 $\mathbb{F}$ 为分裂域, 则 $|G|=\sum_{i=1}^s n_i^2$

§1.7. 举例确定不可约表示

$G' := \langle ghg^{-1}h^{-1} \mid g,h\in G\rangle \lhd G$ G的导群：使 G/G' 为 Abel 群的最小正规子群.

引理1.7.1. $\{G/G' \text{ 的一次表示}\} \xrightarrow{1:1} \{G \text{ 的一次表示}\}$

Pf: $\forall \rho: G\to GL(\mathbb{F}) \Rightarrow \operatorname{Im}\rho = \text{abelian} \Rightarrow G' \subseteq \ker\rho \Rightarrow \checkmark$.

例1.7.2. 求 S_n 的全部1次表示：

1° $n=1$. $\Rightarrow$ 唯一（单位表示）

2° $n\geq 2 \Rightarrow S_n' = A_n$

$1'$ $\operatorname{char}\mathbb{F}=2 \Rightarrow$ 唯一（单位表示）

$2'$ $\operatorname{char}\mathbb{F}\neq 2 \Rightarrow$ 两个（单位表示 + $\rho(\sigma) = \begin{cases} 1 & \sigma=\text{偶} \\ -1 & \sigma=\text{奇}\end{cases}$）

例1.7.3. $S_n \curvearrowright X = \{x_1,\cdots,x_n\} \Rightarrow S_n$ 的置换表示 $(\mathbb{F}X,\rho)$.

$$\Rightarrow \text{子表示} \begin{cases} V_1 := \mathbb{F}x \leq \mathbb{F}X & \text{其中 } x = \sum_{i=1}^n x_i \\ V_2 := \left\{\sum_{i=1}^n a_i x_i \,\middle|\, \sum_{i=1}^n a_i = 0\right\} \leq \mathbb{F}X \end{cases}$$

性质：1) $\operatorname{char}\mathbb{F}\neq 2 \Rightarrow \operatorname{Hom}_{S_n}(V_2,V_2) = \mathbb{F}$

2) $\operatorname{char}\mathbb{F}\nmid n \Rightarrow \begin{cases} \mathbb{F}X = V_1\oplus V_2 \\ V_2 \text{ n次不可约.}\end{cases}$

Pf: 1) $\forall f \in \operatorname{Hom}_{S_n}(V_2,V_2)$ 令 $f(x_1-x_i) = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j$ $a_{i2}x_2+$

$f\circ(1\,i) = (1\,i)\circ f \Rightarrow$
$$\begin{tikzcd} V_2 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "(1i)"'] & V_2 \arrow[d, "(1i)"] \\ V_2 \arrow[r, "f"] & V_2 \end{tikzcd}$$

$x_1-x_i \longmapsto a_{i1}x_1+\cdots+a_{ii}x_i+\cdots+a_{in}x_n$

$x_i-x_1 \longmapsto a_{i1}x_i+\cdots+a_{ii}x_1+\cdots+a_{in}x_n$

$x_i-x_1 \longmapsto -(a_{i1}x_1+\cdots+a_{ii}x_i+\cdots+a_{in}x_n)$

$\operatorname{char}\mathbb{F}\neq 2$

$\Rightarrow a_{i1} = -a_{ii}$, $a_{i2} = \cdots = a_{i\,i-1} = a_{i\,i+1} = \cdots = a_{in} = 0$

$\Rightarrow f(x_1-x_i) = a_{ii}(x_i-x_1)$

$f\circ(ij) = (ij)\circ f \Rightarrow a_{ii} = a_{jj} \Rightarrow f$ 为倍数 $\Rightarrow \checkmark$

2). $\mathrm{char}\,\mathbb{F}\nmid n \Rightarrow V_1\cap V_2=0$ $\left(\sum a_i x_i\in V_1\cap V_2 \Rightarrow \begin{cases} a_1=\cdots=a_n \\ \sum a_i=0\end{cases} \Rightarrow a_1=\cdots=a_n=0 \Rightarrow \checkmark\right)$
$\Rightarrow \mathbb{F}X=V_1\oplus V_2$.

下证 V_2 不可约. 设 $U\subseteq V_2$ 非零子表示. $\forall\, u=\sum_{i=1}^n a_i x_i\in U\setminus\{0\}$.

不妨设 $a_1\neq a_2$. (否则 $a_1=\cdots=a_n \Rightarrow u=\sum a_n x_n\in V_1$ ↯)

$u-(12)u=(a_1-a_2)(x_1-x_2)\in U \Rightarrow x_1-x_2\in U$

$\Rightarrow x_1-x_i=(2i)(x_1-x_2)\in U$

$\Rightarrow V_2=U \Rightarrow V_2$ 不可约.

7.4 阿贝尔群的分裂域.

$m=G$ 的指数 (i.e. 所有元素阶的最小公倍数)

若 $\mathbb{F}$ 含有 m 次本原单位根, 则 $\mathrm{char}\,\mathbb{F}\nmid |G|$.

推论: 设 G 是指数 m 的有限阿贝尔群

1) 若 $\mathbb{F}$ 为分裂域, 则 G 的不可约表示均为 1 维的.

2) 若 $\mathbb{F}$ 有 m 次本原单位根, 则 G 的不可约表示均为 1 维的, 且恰有 $|G|$ 个.

Pf: 1) $(V,\rho)=$ 不可约.

$G=\text{abel} \Rightarrow \rho(g)$ 为 G-模同态 $(\forall g) \xRightarrow{\mathbb{F}\text{ 分裂}} \rho(g)\in\mathbb{F} \Rightarrow \dim V=1$

2) $(V,\rho)=$ 不可约.

设 ζ_m 为 $\rho(g)$ 的特征值.

$\left.\begin{array}{l} G=\text{abel} \Rightarrow \rho(g)-\zeta_m \text{ 为 } G\text{-模同态} \Rightarrow \operatorname{Ker}(\rho(g)-\zeta_m) \text{ 为子表示(非零)} \\ \qquad\qquad V \text{ 不可约}\end{array}\right\}$

$\Rightarrow \rho(g)=\zeta_m \Rightarrow \begin{cases}\dim V=1\\ \mathrm{End}_G(V)\cong\mathbb{F}\end{cases}$

$\left.\begin{array}{l}\sum_{i=1}^s \frac{n_i^2}{d_i}=|G| \\ n_i=1=d_i\end{array}\right\} \Rightarrow s=|G| \Rightarrow \checkmark$

引理 1.7.5. $G\neq\text{abel}$ & $\mathrm{char}\,\mathbb{F}\nmid|G|$. 则 G 的忠实 2 维 $\mathbb{F}$-表示不可约.

Pf: 否则. $V=V_1\oplus V_2$ 其中 $\dim V_1=1=\dim V_2 \Rightarrow G\hookrightarrow GL(V_1)\times GL(V_2)=\mathbb{F}^\times\times\mathbb{F}^\times$
$\Rightarrow G=\text{abelian}$ ↯.

例 1.7.6. 确定 S_3 在任意域上的全部不可约表示.

1° $\mathrm{char}\,\mathbb{F} \neq 2,3$.

$$\left.\begin{array}{l} \cdot\ (\mathbb{F},1),\ (\mathbb{F},\varphi_1) \quad \varphi_1(\text{奇})=-1 \\ 1.7.3 \Rightarrow V_2 \text{ 为2维不可约表示} \\ \quad 1^2+1^2+2^2=6 \end{array}\right\} \Rightarrow S_3 \text{ 恰有 3个不可约 } \mathbb{F}\text{-表示.}$$

2° $\mathrm{char}\,\mathbb{F} \mid 6$.

断言: (V,φ)=不可约 且 $\dim_{\mathbb{F}} V>1 \Rightarrow \varphi((123))$ 特征值 $\neq 1$.

否则 记 $U=\{\alpha\in V \mid (123)(\alpha)=\alpha\}$

$\forall\ \alpha\in U \Rightarrow (123)(12)(\alpha)=(12)(123)^2(\alpha)=(12)(\alpha)$

$\Rightarrow (12)(\alpha)\in U \Rightarrow U$ 为V的子表示 $\Rightarrow U=V$

$\Rightarrow \ker\varphi \supseteq A_3=S_3' \Rightarrow \deg\varphi=1 \Rightarrow ↯$.

1' $\mathrm{char}\,\mathbb{F}=2$.

$\Rightarrow S_3$ 有: 一个单位表示 V_1

一个两维不可约表示 V_2

设(W,φ)为S_3的一个维数大于1的不可约表示

$(\varphi(12))^2=1_W \Rightarrow 1$为$\varphi(12)$的唯一特征值 $\Rightarrow \exists\, v_1\in W$ 为$\varphi(12)$的特征向量

$v_2':=v_1+(123)v_1+(132)v_1 \Rightarrow v_2'=0$ (否则 $(123)v_2'=v_2' \Rightarrow \mathbb{F}v_2'$ 为V_2子表示)

$\Rightarrow v_2:=v_1+(123)v_1=(132)v_1 \notin \mathbb{F}v_1$ (否则 $\mathbb{F}v_1$ 为V_2子表示)

$\Rightarrow U:=\mathbb{F}v_1\oplus\mathbb{F}v_2$ 为W的子表示 $\Rightarrow W=U$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow \begin{cases} (123)v_1=v_1+(132)v_1=v_1+v_2 \\ (123)v_2=(123)(132)v_1=v_1 \end{cases} \\ \quad\ \begin{cases} (12)v_1=v_1 \\ (12)v_2=(12)(132)v_1=((12)(132)(12))(12)v_1=(123)v_1=v_1+v_2 \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \varphi((12))=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix} \\ \varphi((123))=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix} \end{array}$$

$\Rightarrow W=U\cong(V_2,\varphi)$.

2' $\mathrm{char}\,\mathbb{F}=3$.

S_3 有两个1维表示, 它们是全部不可约$\mathbb{F}$-表示.

设(V,φ)不可约. $\varphi((123))^3=1 \Rightarrow 1$为$(123)$的特征值

断言 $\Rightarrow \dim V=1 \Rightarrow$ ✓

例 1.7.7. $D_4 = \langle a, b \mid a^4 = b^2 = 1 = (ba)^2 \rangle$

$1 \to \langle a^2 \rangle \to D_4 \twoheadrightarrow K \to 1$ ← klein 四元群

$\Rightarrow$ D_4 有 4 个互不等价的 1 维不可约表示，记为

$(\mathbb{R}, 1)$, $(\mathbb{R}, \varphi_1)$, $(\mathbb{R}, \varphi_2)$, $(\mathbb{R}, \varphi_3)$

$\begin{cases} \varphi_1(a) = 1 \\ \varphi_1(b) = -1 \end{cases}$ $\begin{cases} \varphi_2(a) = -1 \\ \varphi_2(b) = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} \varphi_3(a) = -1 \\ \varphi_3(b) = -1 \end{cases}$

$(\mathbb{R}^2, \varphi)$: $\varphi(a) = \begin{pmatrix} & -1 \\ 1 & \end{pmatrix}$, $\varphi(b) = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}$

φ 忠实 $\xRightarrow{1.7.5}$ φ 不可约

$\mathrm{Hom}_G(\varphi, \varphi) \cong \mathbb{R}$: $\forall f \in \mathrm{Hom}_G(\varphi, \varphi)$. $f(e_1) =: x e_1 + y e_2$

$f \circ b = b \circ f \Rightarrow f(be_1) = bf(e_1) \Rightarrow f(e_1) = xe_1 - ye_2 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow f(e_1) = xe_1$

$f \circ a = a \circ f \Rightarrow f(ae_1) = af(e_1) \Rightarrow f(e_2) = a \cdot xe_1 = xe_2$

$\Rightarrow f = x$

$1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 2^2 = 8 = |D_4| \Rightarrow D_4$ 恰有 5 个不可约实表示.

总结

定义: 线性作用 = 群在集合上的作用 + 集合上的线性空间结构 + 相容条件 (i.e. 作用是线性的)

$$(V, \varphi: G \to GL(V))$$

0到1(从无到有):

置换表示 $\rightsquigarrow$ 主表示, 正则表示, 等.

1到n(从已有的表示构造新表示)

子, 商(限制), 直和, 对偶, 张量, 提升, 外张量

简单对象:

不可分解表示?

$\rightsquigarrow$ 不可约, 完全可约,

合成列, 合成因子

例: $\mathrm{char}\,\mathbb{F} \nmid |G|$. $\rightsquigarrow$ 不可约表示分类 (例如 $\mathbb{F} = \mathbb{C}$)

$\mathrm{char}\,\mathbb{F} \mid |G|$ $\rightsquigarrow$ 不可分解表示分类

$S_3 \longrightarrow$ 1° $\mathrm{char} \neq 2, 3$ $\rightsquigarrow$ $1+1+2$

2° $\mathrm{char} = 2$ $\rightsquigarrow$ $1+2+??$

3° $\mathrm{char} = 3$ $\rightsquigarrow$ $1+1+??$

问题: ① 不可约表示藏在哪里了?

② 如何简单地判定?

③ 如何简单地区分?

$\rightsquigarrow$ 特征标理论.